Teste 2

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. CÁLCULO COMBINATÓRIO. PROBABILIDADES

Soluções

Grupo I

1. **(C)**

2. **(A)**

3. **(D)**

4. **(B)**

5. **(C)**

Grupo II

1. Dado que, para qualquer número natural n, $1-2\sqrt{n}$ designa um número negativo, tem-se, para qualquer número natural k entre 1 e n, $\frac{1-2\sqrt{n}}{n+k} \leq \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}$. Assim, pode concluir-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2\sqrt{n}}{n+k} \leq n \times \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}$.

Tem-se: $\lim\left(n \times \frac{1-2\sqrt{n}}{n+n}\right) = \lim \frac{1-2\sqrt{n}}{2} = -\infty$

Portanto, por comparação, conclui-se que $\lim v_n = -\infty$ e, ainda por comparação, também se conclui que $\lim u_n = -\infty$, pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n + 1$. Trata-se, portanto, de uma sucessão divergente.

2.

a) A função h é decrescente em $\left]-\infty, 0\right]$ e em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ e é crescente em $\left[0, \frac{2}{3}\right]$.

A função atinge um mínimo relativo igual a -1 em 0 e atinge um máximo relativo igual a $-\frac{23}{27}$ em $\frac{2}{3}$.

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$; $h\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{25}{27}$ e, portanto, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, -\frac{25}{27}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função h .

b) A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função g.

A reta de equação $y=x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função g, em $-\infty$.

A reta de equação $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g, em $+\infty$.

3. $y=22x+26$

4. Dado que a função f' é contínua em $\mathbb{R}$ (pois f é duas vezes diferenciável), então é contínua em $[a,b]$. Como $f'(a)\times f'(b)<0$, o corolário do teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que a função f' tem pelo menos um zero em $]a,b[$. Esse zero é único, pois, dado que $\forall x\in]a,b[, f''(x)>0$, a função f' é estritamente crescente em $]a,b[$.

Portanto, a função f não pode atingir mais do que um extremo em $]a,b[$, pois, sendo diferenciável, se atinge um extremo num ponto, então a derivada é nula nesse ponto.
Seja c o único zero de f' em $]a,b[$.

Tem-se $f'(c)=0$ e $f''(c)>0$, de onde se conclui que a função f atinge um mínimo em c.

5.

a) $\frac{17}{72}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{432}$